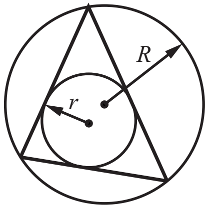
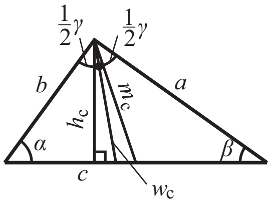




Ympäri piirretyn ympyrän säde *R*

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Sisään piirretyn ympyrän säde *r*

$$r = \frac{2A}{a+b+c} = \frac{A}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Korkeusjana h_c

$$h_c = \frac{ab}{2R} = \frac{2A}{c} = b\sin\alpha = a\sin\beta$$

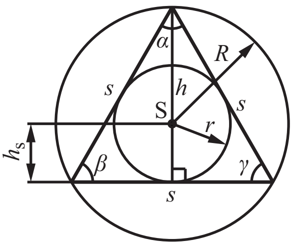
Keskijana m_c

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Kulman γ puolittaja w_c

$$w_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)} = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}$$

2. Tasasivuinen kolmio



$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

$$A = s^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

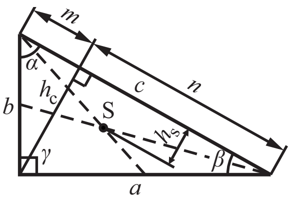
$$R = s\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h_s = \frac{h}{3} = s\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$r = s\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$h = s\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Suorakulmainen kolmio



Pythagoraan lause

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

$$m = b^2 / c$$

$h_s = h_c / 3$

$\alpha + \beta = \gamma = 90^\circ$

$h_c = ab / c$

c = hypotenuusa

a, b = kateetti

r = sisään piirretyn ympyrän säde

$A = ab / 2$

$R = c / 2$

$n = a^2 / c$

3. $y = \arctan x \iff \tan y = x$

Määritysjoukko: **R**

Arvojoukko: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

4. $y = \operatorname{arccot} x \iff \cot y = x$

Määritysjoukko: **R**

Arvojoukko: $]0, \pi[$

Arkusfunktioiden kaavoja

$$x = \arccos\sqrt{1 - x^2} = \arctan\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 \le x < 1$$

$$x = -\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arctan\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 0$$

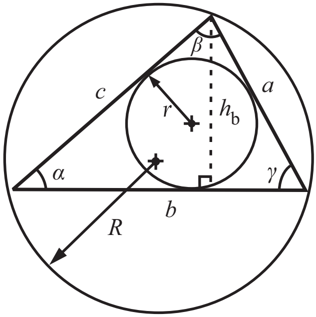
$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1 - x^2} = \arctan\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad 0 < x \le 1$$

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2} = \pi + \arctan\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad -1 \le x < 0$$

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \ge 0$$

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x < 0$$

5.6 Tasokolmioiden trigonometriaa



Kuvion merkinnät

a, b, c = kolmion sivut

α, β, γ = vastaavat kulmat

$s = 1/2 \cdot (a + b + c)$ = piirin puolikas

A = kolmion ala

h_b = sivun b vastainen korkeus

r = kolmion sisään piirretyn ympyrän säde

R = kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde

Trigonometrisia kaavoja

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Sinilause

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinilause

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Tangenttilause

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan\frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Heronin kaava

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

4. Matriisin kertominen luvulla

Matriisi $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)$ kerrotaan luvulla k siten, että jokainen alkio kerrotaan tällä luvulla:

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}k = \left(ka_{ij}\right)$$

5. Matriisin transponointi

Matriisin $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ transpoosi $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$ on:

$$\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} = \left(b_{ij}\right)_{n \times m}, \text{ missä } b_{ij} = a_{ji}.$$

Pystyvektorin transpoosi on vaakavektori ja vaakavektorin transpoosi on pystyvektori:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

6. Symmetrinen neliömatriisi

Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on *symmetrinen*, jos $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}$. Symmetrisen matriisin alkioille pätee $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i ja j.

16.4 Matriisien laskutoimi-tusten ominaisuuksia

Summa ja erotus

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

Huom. Liitäntälakien perusteella summa $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ voidaan kirjoittaa myös ilman sulkuja.

Vakiolla kertominen (k ja p vakioita)

$$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$$
$$(k + p)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{A}$$
$$k(p\boldsymbol{A}) = (kp)\boldsymbol{A}$$
$$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$
$$(1 + k)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + k\boldsymbol{A}$$
$$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

Matriisitulo

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$$
$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$$

Huom. 1: Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli yleensä $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Huom. 2: Jos joillekin matriiseille $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ pätee $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, niin matriisien sanotaan *kommutoivan*.

Huom. 3: Matriisitulo voi olla nolla eli $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$, vaikka $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$.

Huom. 4: $\boldsymbol{ABC}$ voidaan kirjoittaa myös ilman sulkuja.

Transpoosin säännöt

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}$$
$$(k\,\boldsymbol{A})^{\mathbf{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}; \qquad k = \text{vakio}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$$
$$(\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{ABC})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$$
$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}) = \det \boldsymbol{A}$$

Kaavojen yhdistäminen

Tasaisesti kiihtyvä liike

$$v = v_0 + at \qquad s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$$

Tasaisesti hidastuva liike

$$v = v_0 - at \qquad s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

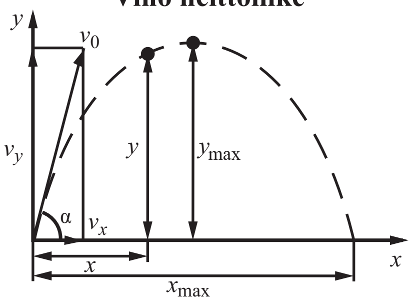
$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} \qquad v = \sqrt{v_0^2 - 2as}$$

Alkunopeus $v_0 = 0$

$$v = at \qquad s = \frac{at^2}{2} \qquad s = \frac{v^2}{2a}$$

1.3 Heittoliike

Vino heittoliike



Nopeuden komponentit hetkellä t

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

Kappaleen paikka hetkellä t

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$$
$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Heittoparaabelin yhtälö

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Kappaleen nopeus hetkellä t

$$v = \sqrt{v_0^2 - gt(2v_0 \sin\alpha - gt)}$$

Kappaleen nousukorkeus

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

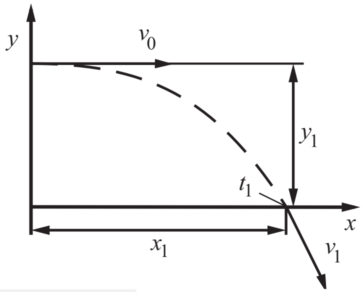
Kappaleen nousuaika maksimikorkeuteen y_{max}

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Kappaleen kantama

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Vaakasuora heittoliike



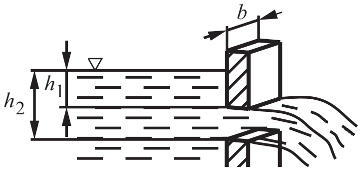
Paikassa (x_1, y_1)

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + (gt_1)^2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x_1^2$$

$$x_1 = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

Purkaus suuresta aukosta

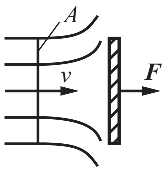


$$q_V = \frac{2}{3}kb\sqrt{2g}\cdot(h_2^{3/2} - h_1^{3/2})$$

b = aukon leveys
k ≈ 1 (iso aukko)
∇ = osoittaa nestepinnan

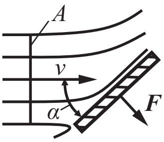
Purkausvoima suoraa tasopintaa vastaan

$$F = \rho q_V v = \rho A v^2$$



Purkausvoima vinoa pintaa vasten

$$F = \rho q_V v \sin\alpha = \rho A v^2 \sin\alpha$$

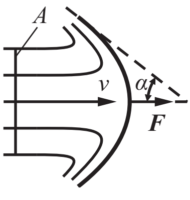


Purkausvoima kaarevaa pintaa vasten

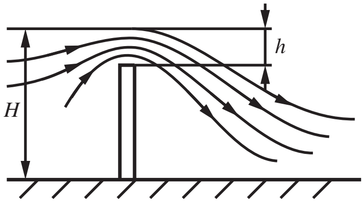
$$F = \rho q_V v(1+\cos\alpha) = \rho A v^2(1+\cos\alpha)$$

$\alpha < 10^\circ$:

$$F = 2\rho q_V v = 2\rho A v^2$$



Ylivirtaus



$$V = \frac{2\mu}{3}hb\sqrt{2gh}$$

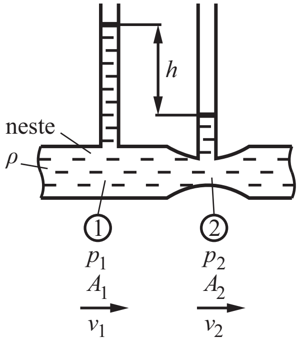
$$\mu = 0{,}615\left(1 + \frac{1}{1{,}6 + 1000h}\right)\left(1 + 0{,}5\frac{h^2}{H^2}\right)$$

b = leveys ylivirtauskohdassa
H ja h ovat μ:n kaavassa metreinä

Kaava on käyttökelpoinen, jos on voimassa:

1. $H - h \geq 0{,}3$ m
2. Veden korkeustaso $H \geq 2h$
3. Läpivirtauskorkeus h = 0,025 m - 0,8 m

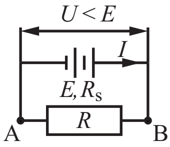
Venturiputki nesteen virtausnopeuden mittaamiseksi



$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h$$

$$q_V = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

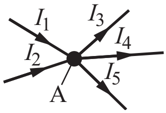


Kirchhoffin lait

Kirchhoffin 1. laki

Johtimen liitoskohtaan (A) tulevien virtojen summa $I_1 + I_2$ on yhtä suuri kuin siitä lähtevien virtojen summa $I_3 + I_4 + I_5$:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

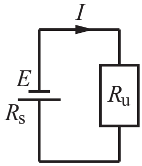


Kirchhoffin 2. laki

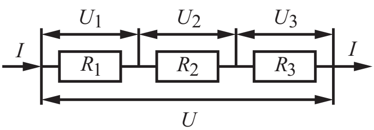
Suljetussa virtapiirissä lähdejännite (E) on yhtä suuri kuin virtapiirin jännitehäviöiden summa $R_sI + R_uI$:

$$E = R_sI + R_uI$$

R_s = sisäinen vastus
R_u = ulkoinen vastus



Vastukset sarjassa

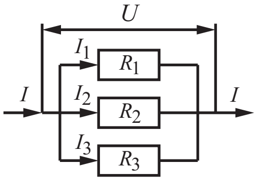


$$R = R_1 + R_2 + R_3 \ldots$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \ldots$$

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 \ldots)$$

Vastukset rinnan

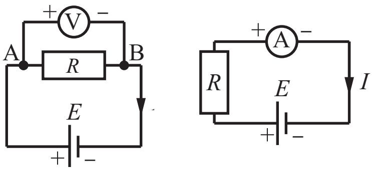


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \ldots$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \ldots = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \ldots$$

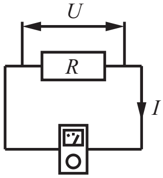
8.8 Sähköisten suureiden mittaaminen

Voltti- ja ampeerimittarikytkentä



Resistanssin mittaaminen

$$R = U/I$$



Wheatstonen silta

Kun ampeerimittarin A kautta ei kulje virtaa, saadaan:

$$R_x = \frac{R_2R_3}{R_1}$$